

# Evaluating error characteristics of gyration under uniform magnetic field by Buneman-Boris method

K.Ohara[1], H.Tadokoro[1], Y.Katoh[2], T.Tsuboi[1]

[1]Tokyo Univ. Tech. [2]Tohoku Univ.

## 1. 背景

宇宙空間を満たすプラズマの運動は、電磁場に従って以下の様なローレンツ力に従う運動方程式で記述できる[1]。

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

それぞれ電荷( $q$ )、質量( $m$ )、時間( $t$ )、電場( $\vec{E}$ )、速度( $\vec{v}$ )、磁場( $\vec{B}$ )である。

電磁場に従うプラズマの運動において、ジャイロ運動は解析的に解く事ができるが、バウンス運動とドリフト運動に関しては解析的に解く事に困難を伴うため、(1)式の微分方程式を数値的に解く必要がある。その解法(以下スキーム)には様々なものがこれまでに提案されている。しかしながら、スキーム毎の定量的な評価が十分に行われていないのが現状である。以下に本研究でも用いたスキームを示す。

- ・ Euler 法
- ・ Buneman-Boris 法

Euler 法は数値計算において最も単純な解法であり、数値解析の初歩としてよく用いられる。Buneman-Boris(BB)法は近年ジャイロ運動を扱う際に、主に用いられるスキームであり、本研究でも BB 法を主に用いる。

## 2. 研究目的

本研究では(1)式における電場( $\vec{E}$ )を 0 と仮定し、磁場による影響のみで記述できる以下の様な式に着目する。

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2)$$

磁化惑星中の磁場、特に内部磁気圏の磁場形状はダイポール磁場で近似できる[1]。そのため(2)式の磁場 $\vec{B}$ はダイポール磁場として設定する必要がある。本研究ではその前段階として時間変化しない直線一様磁場を仮定し、ジャイロ運動のみに関して解く(図 1)。そこで(2)式に着目し、BB 法を用いた数値計算による計算解と解析解の誤差評価を行う。具体的な比較変数は以下の 2 つである。

- ・ ジャイロ半径(gyro-radius)
- ・ 運動エネルギー (kinetic energy)

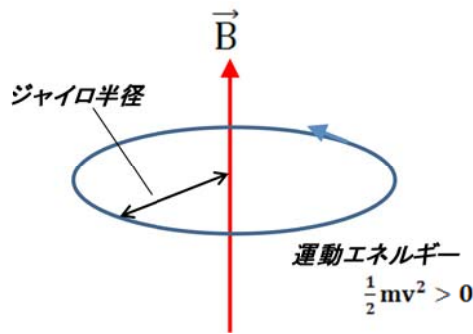


図 1 ジャイロ運動の概念図

図 1 は本研究における電子のジャイロ運動に関する概念図である。誤差評価方法としてジャイロ半径と運動エネルギー誤差のパラメータ依存性を調べる。

### 3. 誤差評価におけるパラメータ設定

誤差評価を行う際に、結果に依存するパラメータは以下の 3 つである。

- ・ 初速度  $v_0$ (光速度で規格化)
- ・ 1 ジャイロ周期の時間分割数(以下  $A1$ 、 $\Delta t$  に関するパラメータ)
- ・ ジャイロ回転数(以下  $A2$ 、計算終了時間に関するパラメータ)

$\Delta t$  と  $A1$  の関係は以下の式で表すことができる。

$$\Delta t = \frac{T}{A1} \quad (2)$$

$T$  はジャイロ周期(1 ジャイロ回転するのに要する時間)である。以下に  $A2=1$  における  $A1$  の違いによる結果を示す。なお、 $v_0=0.5c$  の条件下で計算を行った。

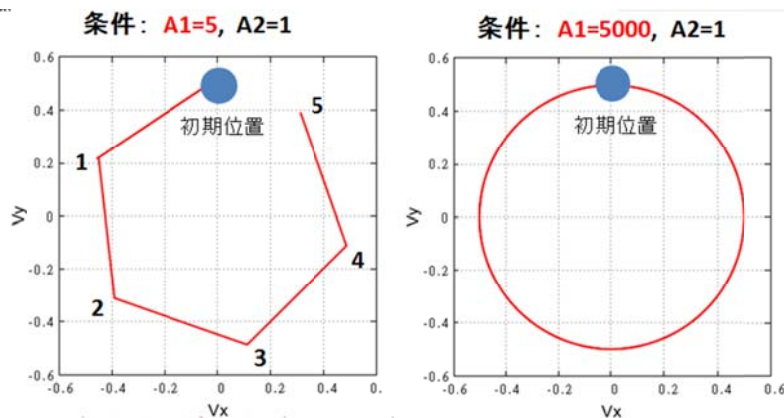


図 2  $A1$  の違いによるジャイロ運動

図 2 は  $A1=5$  と  $A1=5000$  における結果の違いを表したジャイロ運動である。 $A1=5$  の図では初期位置(図中の青丸)から 1、2、3、4、5 と位置変化を示した。 $A1=5000$  の図では分割数が多く、初期位置と計算終了位置がほぼ重なっている。

図 3 に本計算における Input、Output パラメータの概念図を示す。

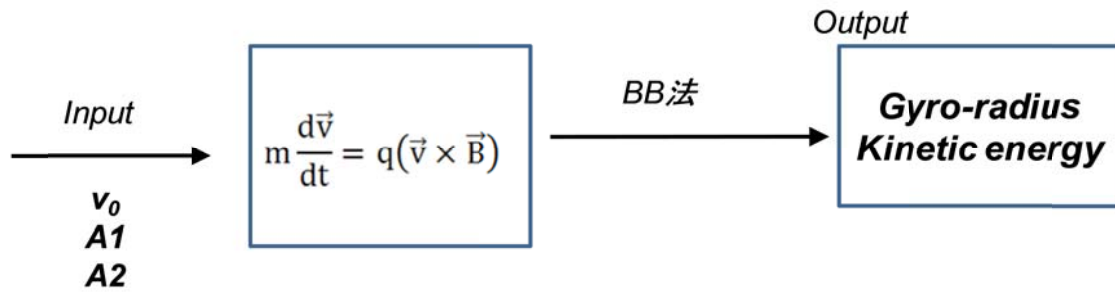


図3 Input、Output パラメータの概念図

#### 4. BB 法による結果

本資料では BB 法のみに関して載せる。BB 法において、用いたパラメータを以下に示す。

$v_0 = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5, 0.75, 0.8, 0.9, 0.99$

$A1 = 1, 5, 10, 20, 30, 50$

$A2 = 10^0, 10^3, 10^7, 10^9$

全てのパラメータの組み合わせ(192 通り)の計算を行った。上記の条件下において、時間変化しない直線一様磁場におけるジャイロ運動の最大誤差は  $10^{-7}$  [%] オーダーであった。

以下に運動エネルギーに関する誤差(代表例)を示す。図 4 は下記の条件下で行った

$v_0 = 0.0001c, 0.1c, 0.3c, 0.5c, 0.75c, 0.8c, 0.9c, 0.99c$

$A1 = 1, 5, 10, 20, 30, 50$

$A2 = 10^9$

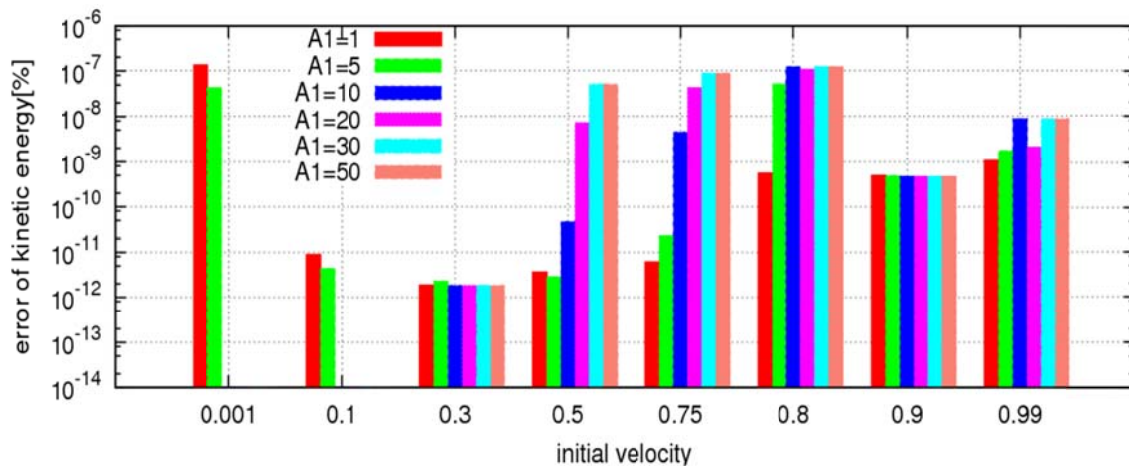


図4  $A2=10^9$ における運動エネルギー誤差に関する $v_0$ 、 $A1$ の依存性(BB 法)

図 4 は  $A2=10^9$ における運動エネルギー誤差に関する $v_0$ 、 $A1$ の依存性を示している。縦軸が運動エネルギーの誤差、横軸が初速度、色分けしているのが  $A1$  である。最大誤差は  $v_0 = 0.001c$ 、 $A1=1$  において  $10^{-7}$  [%] オーダーである。 $v_0 = 0.001c$ において誤差が大きく、 $v_0 = 0.1c$ 、 $0.3c$ において誤差が小さくなり、 $v_0 = 0.5c$ 以降で再び誤差が大きくなっている。このような傾向は他の条件下における結果でもみられているが、 $v_0$ が大きくなるにつれて誤

差も大きくなるといった法則性はみられない。同様に  $A1$  依存の誤差による法則性もみられない。

## 5. まとめ

本研究では BB 法を用いた時間変化しない一様磁場における電子のジャイロ運動に関して誤差評価による定量評価を行った。誤差評価対象はジャイロ半径と運動エネルギーである。本研究の条件下において、BB 法を用いたジャイロ運動の最大誤差は  $10^{-7}$ [%]オーダーであった。また、本資料には載せていないが Euler 法を用いたジャイロ運動の最大誤差は  $10^9$ [%]オーダーであった。

BB 法の結果に関して、一般的に初速度が速く ( $\mathbf{v}_0$  が大きく)、1 ジャイロ周期の分割数  $A1$  が小さく、ジャイロ回転数  $A2$  が大きくなるにつれて誤差は大きくなる (Euler 法の結果より) と予想されるが、必ずしもその法則性に従った結果は得られなかった。これは BB 法自身の誤差だけでなく丸め誤差の問題もあると推測される。そのためスキーム (BB 法) 依存の誤差と丸め誤差の分割をすることによって、より定量的な解釈を今後可能にすると考えられる。今後の課題として、ダイポール磁場におけるバウンス運動、ドリフト運動を考慮したプラズマ運動に関して解くことが挙げられる。

## 参考文献

- [1] 「Basic Space Plasma Physics」1996 W. Baumjohann 著 出版 Imperial College Press
- [2] 「太陽地球系科学」2010 地球電磁気・地球惑星圏学会 学校教育ワーキング・グループ 編 出版京都大学学術出版会