2018/2/27
惑星圏研究会

内核半径の異なる回転球殻における地球ダイナモ維持に必要なレイリー数に関する研究

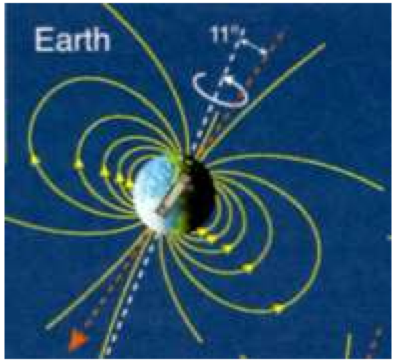
西田有輝[1], 加藤雄人[1], 松井宏晃[2], 熊本篤志[1]
[1]東北大学大学院理学研究科,
[2]カリフォルニア大学デービス校

1. 導入

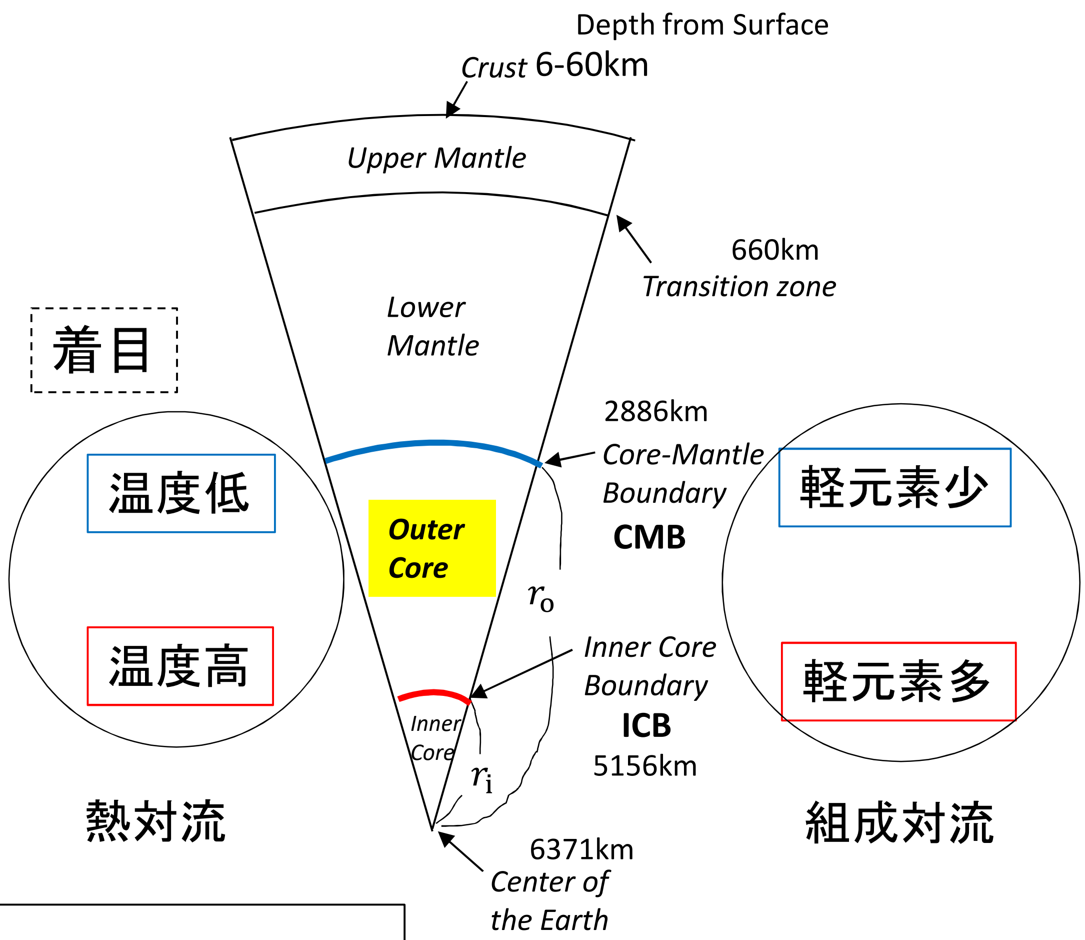
1.1 地球磁場とダイナモ

双極子磁場("棒磁石")
磁気モーメント

$$7.7 \times 10^{22}\mathrm{Am}^2$$



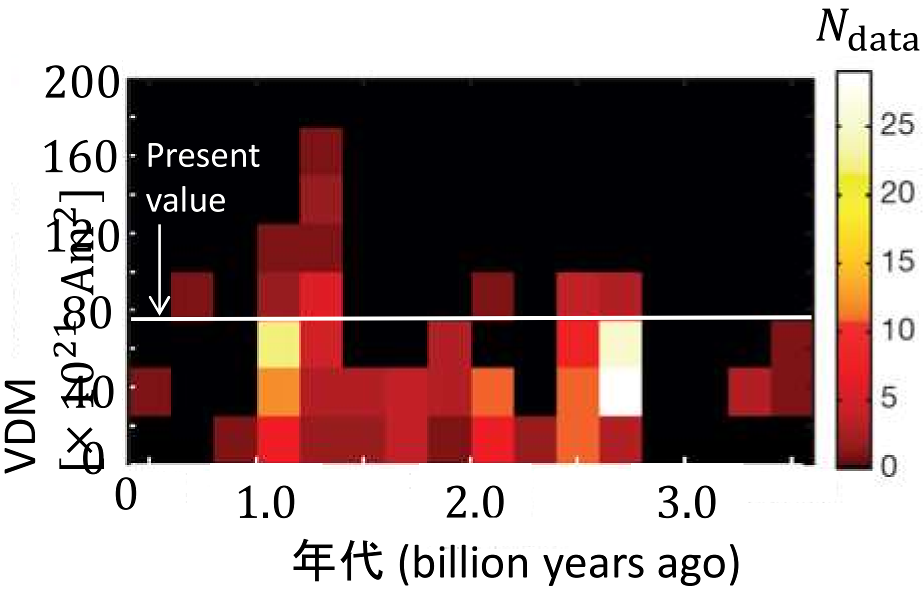
[Encyclopedia of the solar system
2nd. ed., credit: Steve Bartlett]



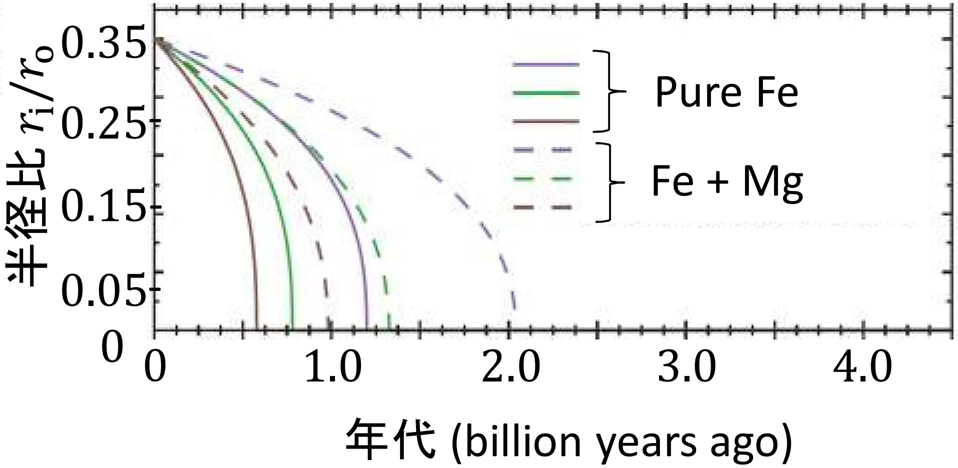
流体Fe (+ Si,O,Mg,…)が対流

運動エネルギーが磁気エネルギーに変換
= "ダイナモ過程"

1.2 過去の地球



[Biggin et al., 2015]



[O’Rourke & Stevenson, 2016]

VDM(仮想双極子モーメント)は当時の地球の磁気モーメントを古地磁気から推定したもの

古地磁気記録から地球磁場は少なくとも過去**35億年間**維持されてきたと考えられている

+

熱進化モデル計算より, 過去約10億年かけて内核は$\boldsymbol{r_{\mathrm{i}}/r_{\mathrm{o}} = 0}$ **から** $\boldsymbol{0.35}$へと連続的に成長してきたと議論されている

--> 様々な内核サイズにおける対流を調査することは重要

1.3 パラメーター

無次元化した運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) \underbrace{- \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})}_{\text{粘性項}} + \underbrace{\frac{Ra}{Pr} T \frac{\boldsymbol{r}}{r_\mathrm{o}}}_{\text{浮力}} \underbrace{- \frac{2}{E} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{\frac{1}{Pm \cdot E} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}}_{\text{ローレンツ力}}$$

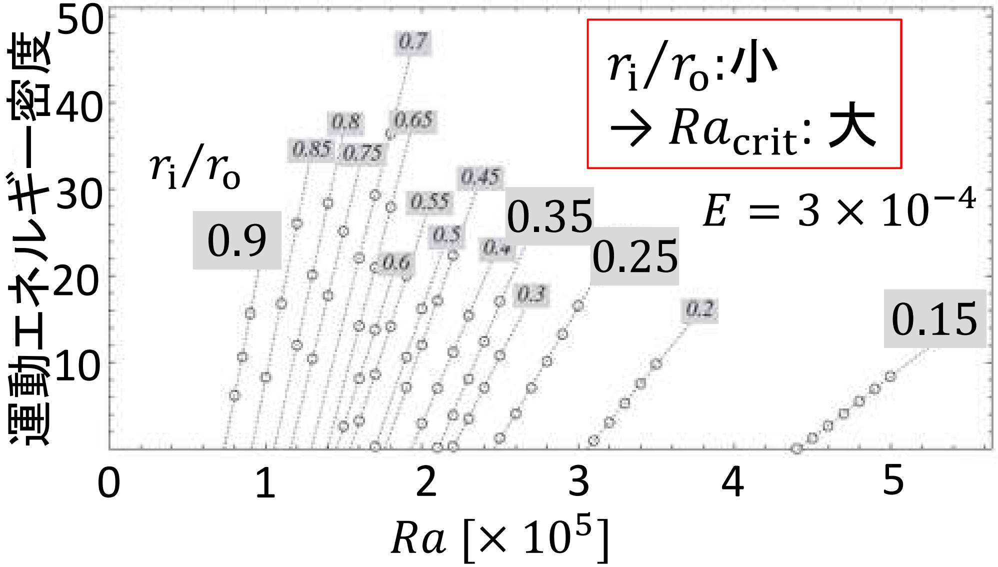
Name	Symbol	Definition	Estimation
$\boxed{\text{Rayleigh number}}$	Ra	$\alpha_T g_0 (\Delta T) L^3 / \nu \kappa_T$	5.8×10^{28}
Ekman number	E	$\nu / \Omega L^2$	2.7×10^{-15}
Prandtl number	Pr	ν / κ_T	0.1
Magnetic Prandtl number	Pm	ν / η	1.0×10^{-6}

<-- 浮力/拡散

長さ	$L (= r_\mathrm{o} - r_\mathrm{i})$	圧力	$\rho_0 \nu^2 / L^2$
時間	L^2 / ν	温度	ΔT
速度	ν / L	磁場	$\sqrt{\rho_0 \mu_0 \Omega \eta}$

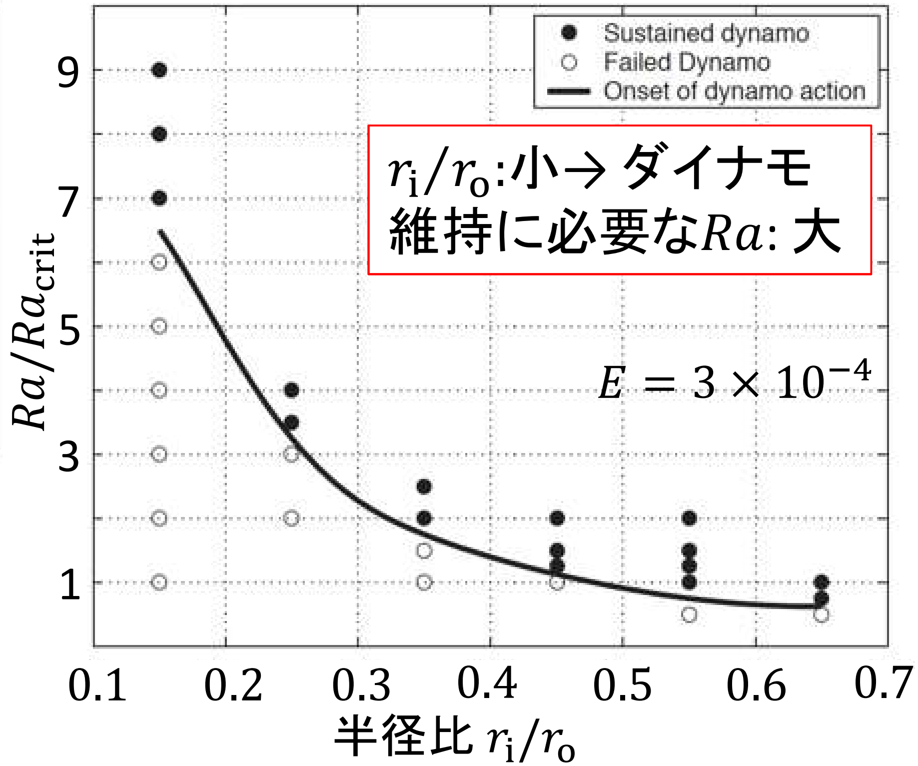
1.4 半径比とレイリー数の関係

磁場なし熱対流シミュレーション



[Al-Shamali et al., 2004]

磁場ありMHDシミュレーション



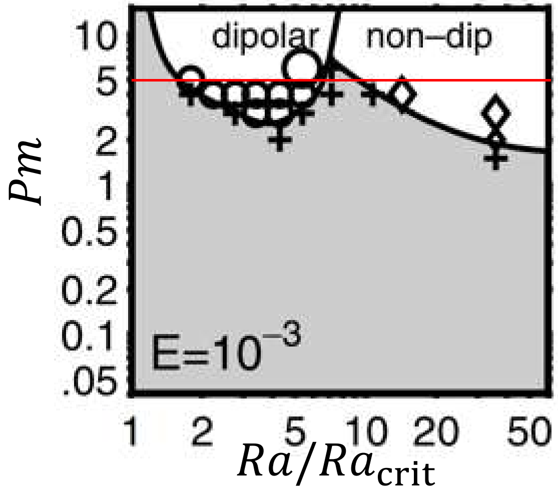
[Heimpel et al., 2005]

臨界レイリー数 Ra_crit
...熱対流のonsetを表す

1.5 研究の目的

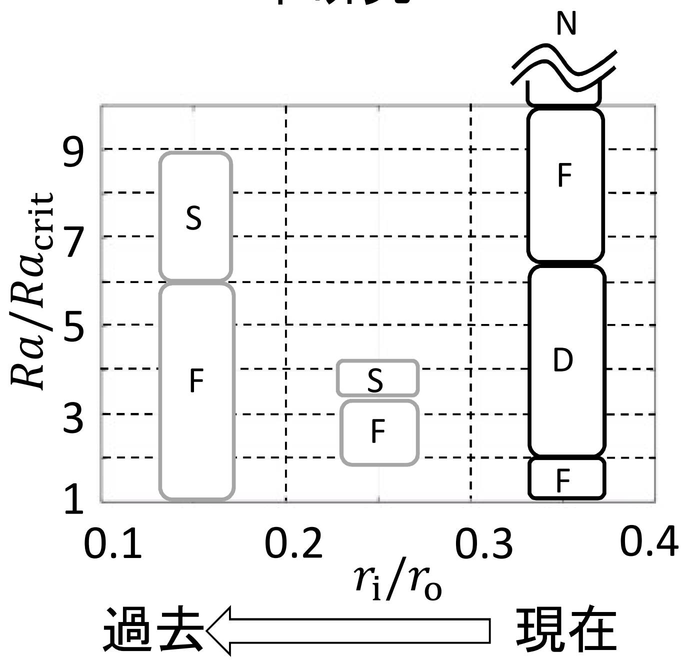
過去の地球の外核における対流を十分に理解するために、
数値ダイナモコードCalypso [Matsui et al., 2014]を用いて、
現在より小さい内核設定でこれまで調査されていないパラメーター
でダイナモ作用の特徴・性質を調べた。
・ 広い範囲のレイリー数
・ ダイナモレジームを定量的に評価

現在の半径比における
ダイナモレジーム



[Christensen and Aubert, 2006]

本研究　$E = 1 \times 10^{-3}$



$E = 3 \times 10^{-4}$

2. 手法
2.1 支配方程式

運動方程式 $\rho_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right)=-\boldsymbol{\nabla}P+\rho_0\nu\,\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{g}-2\rho_0\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$

ブジネスク近似; $\rho=\rho_0[1-\alpha(T-T_0)]$ …浮力に関する項のみ密度変化を考慮
電流… $\boldsymbol{J}=(1/\mu_0)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$

熱拡散方程式 $\frac{\partial T}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})T=\kappa_T\boldsymbol{\nabla}^2T$

非圧縮流体の連続の式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0$

磁場の誘導方程式 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})+\eta\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}$

磁場に関するガウスの法則 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$

無次元化

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\nabla}\left(P+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u})+\frac{Ra}{Pr}T\frac{\boldsymbol{r}}{r_o}-\frac{2}{E}\boldsymbol{e}_z\times u+\frac{1}{Pm\cdot E}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})T+\frac{1}{Pr}\boldsymbol{\nabla}^2T,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{Pm}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

2.2 コードと初期/境界条件

数値ダイナモコードCalypso [Matsui et al., 2014].

- 動径方向微分… 2次有限差分法
- スペクトル法
  ベクトル場はソレノイド… ポロイダル成分+トロイダル成分に分解
- 時間ステップ
  線形拡散項… Crank-Nicolson法
  コリオリ力と非線形項… 2次Adam-Bashforth法

<u>初期条件</u>

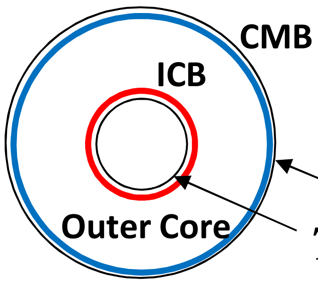
様々なモードの温度擾乱を与える:

$$T(r,\theta,\phi) = \sum_{l=1}^{l_{\max}} T_l^l(r) Y_l^l(\theta,\phi)$$

種磁場として軸対称なダイポールを与える:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \left(B_{S1}^0(r) Y_1^0(\theta,\phi)\hat{r}\right) + \boldsymbol{\nabla} \times \left(B_{T2}^0(r) Y_2^0(\theta,\phi)\hat{r}\right)$$

<u>境界条件</u>



マントルと内核…電気的に絶縁

$T = 0, \boldsymbol{u} = 0$

$T = 1, \boldsymbol{u} = 0$

3. 結果と考察
3.1 パラメーター設定と典型的な例

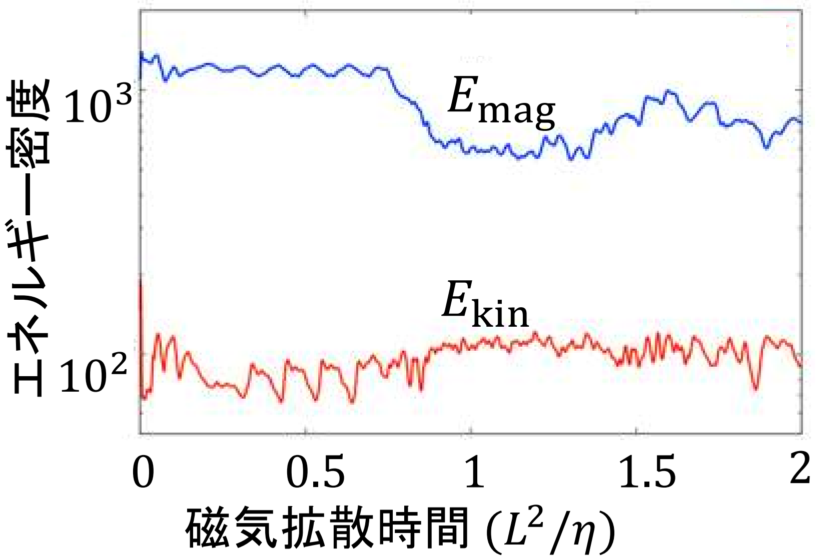
	Case 1	Case 2	Case 3
r_i/r_o	0.15	0.25	0.35
$Ra[\times 10^5]$	5.0~8.7	1.4~7.0	0.84~4.5
Ra/Ra_{crit}	4.6~8.0	1.9~9.7	1.5~8.0

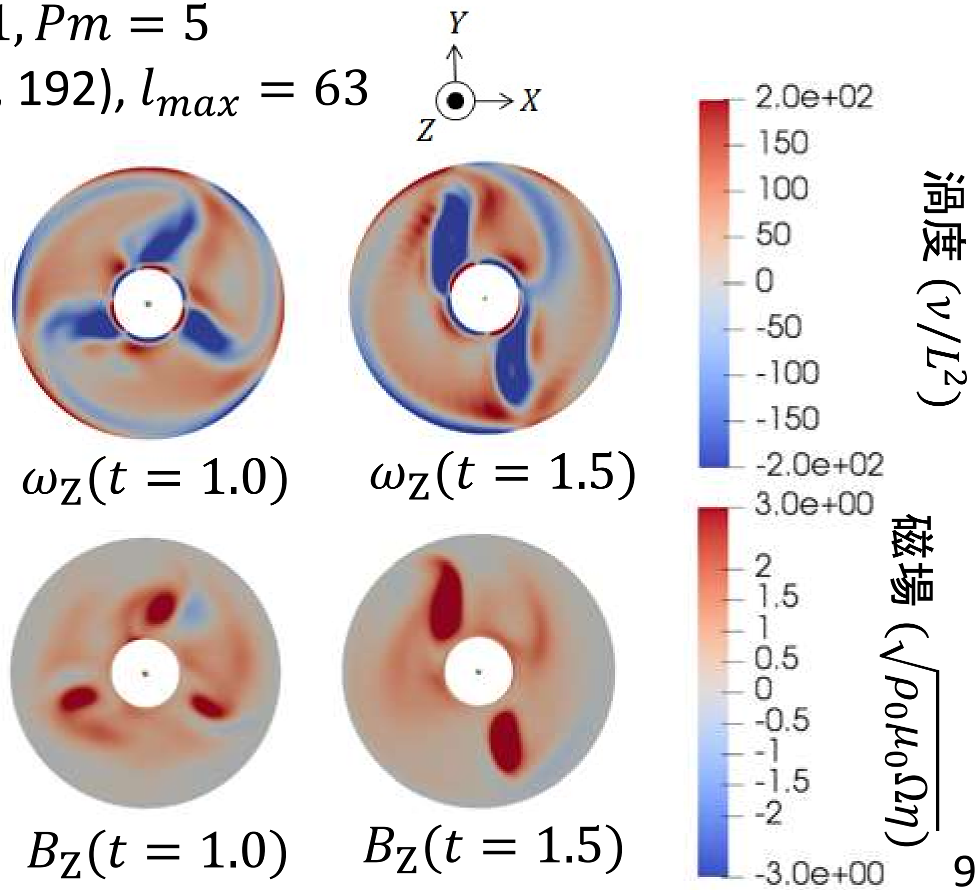
$E = 1 \times 10^{-3}, Pr = 1, Pm = 5$

Grids $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (81, 96, 192), l_{max} = 63$

In $r_i/r_o = 0.25$

$Ra/Ra_{crit} = 3.1$ $(Ra = 2.2 \times 10^5)$



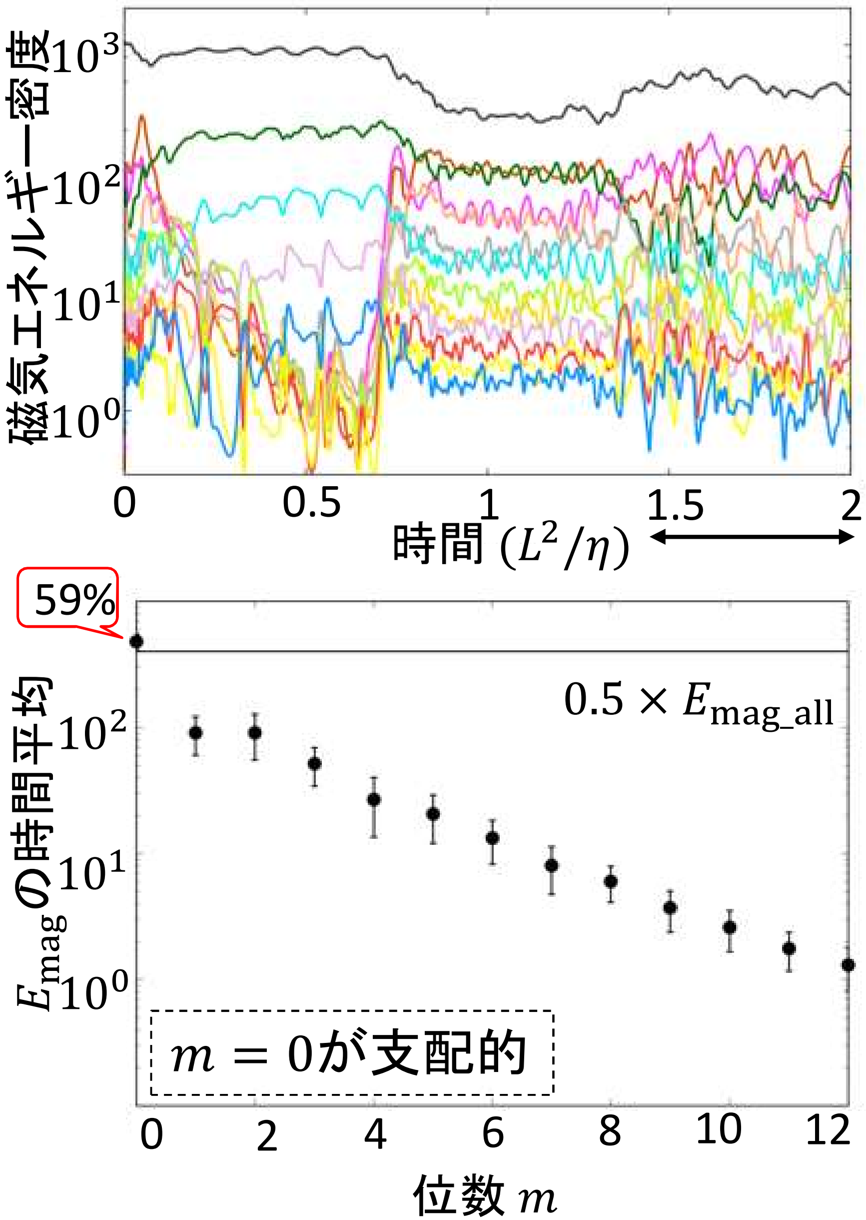


$\omega_Z(t = 1.0)$ $\omega_Z(t = 1.5)$

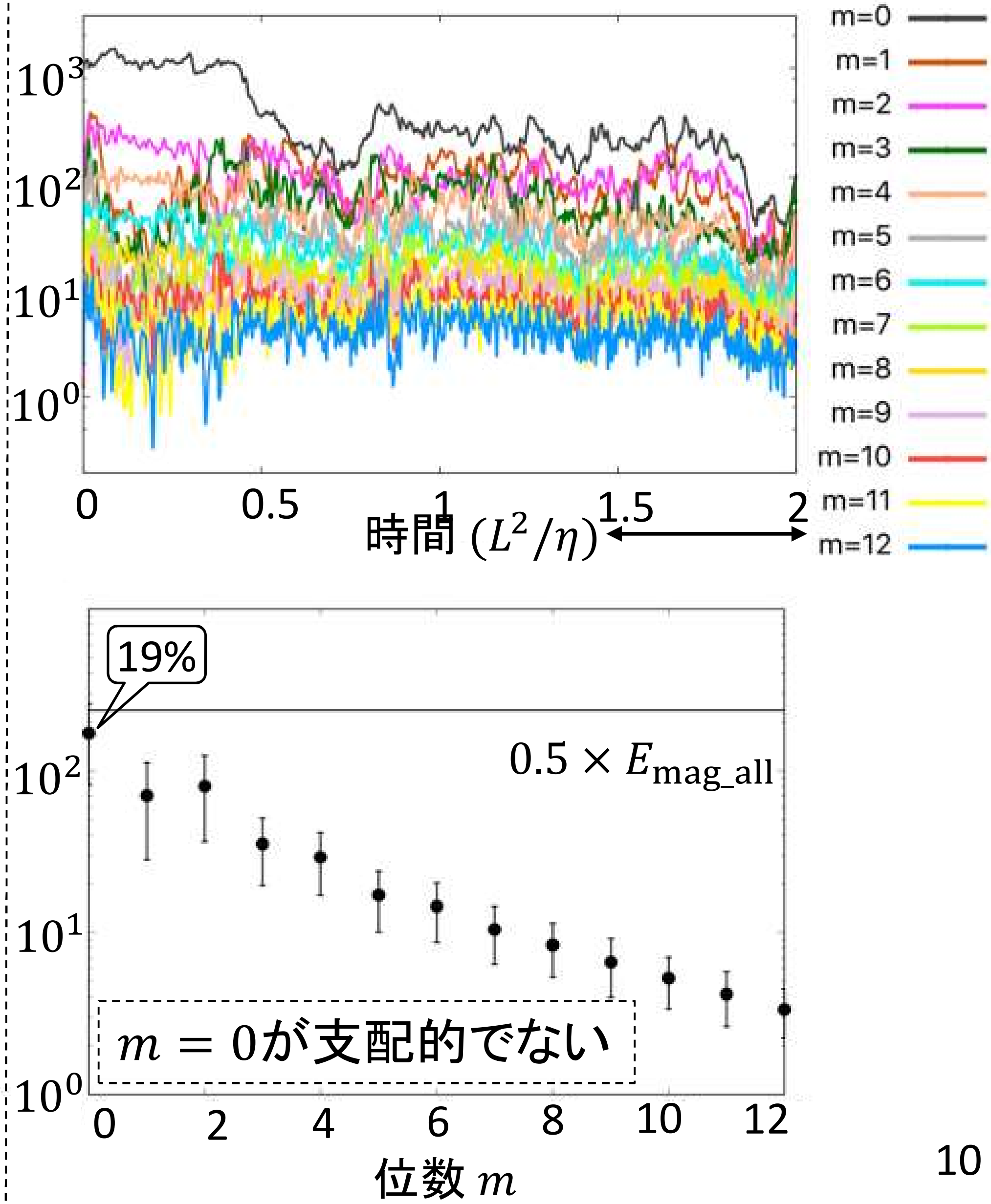
$B_Z(t = 1.0)$ $B_Z(t = 1.5)$

3.2 DipoleかNon-dipoleの基準

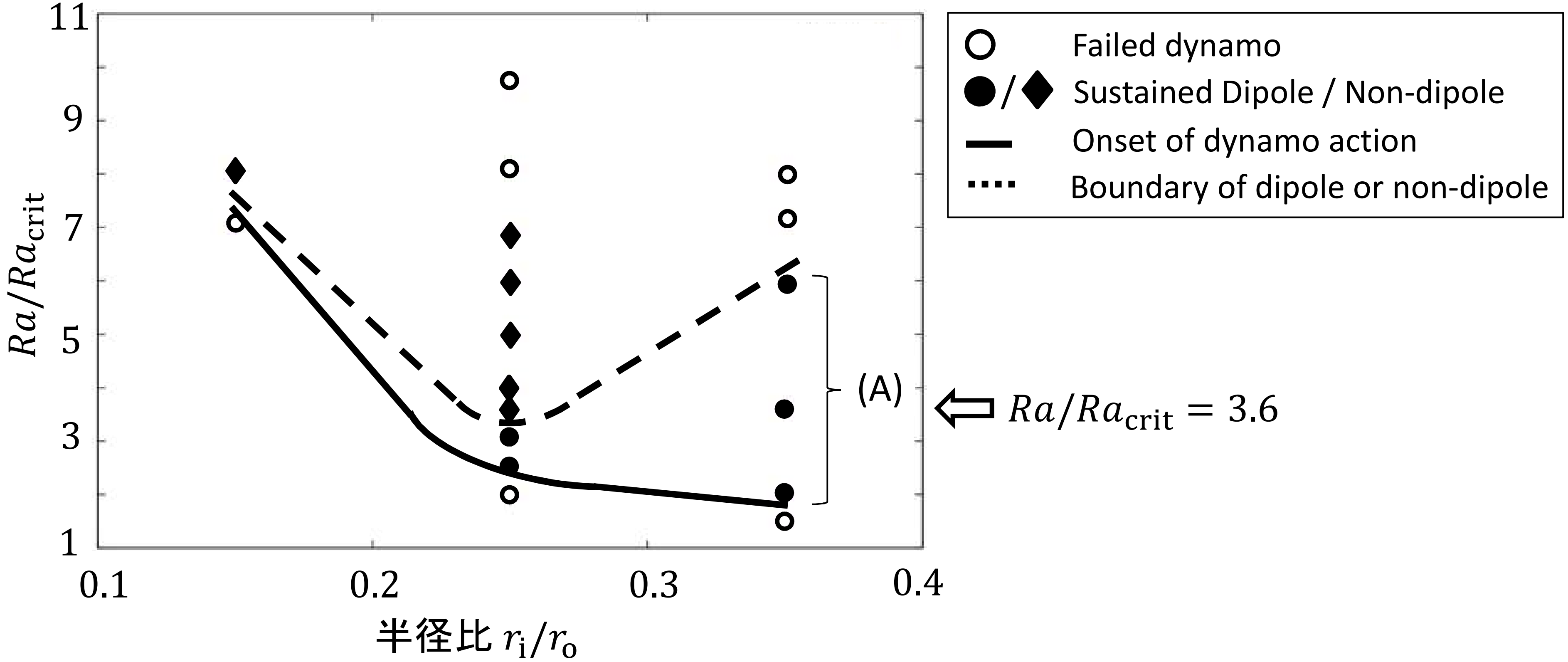
Dipole $Ra/Ra_{\mathrm{crit}} = 3.1$ $(Ra = 2.2 \times 10^5)$



Non-dipole $Ra/Ra_{\mathrm{crit}} = 5.0$ $(Ra = 3.6 \times 10^5)$



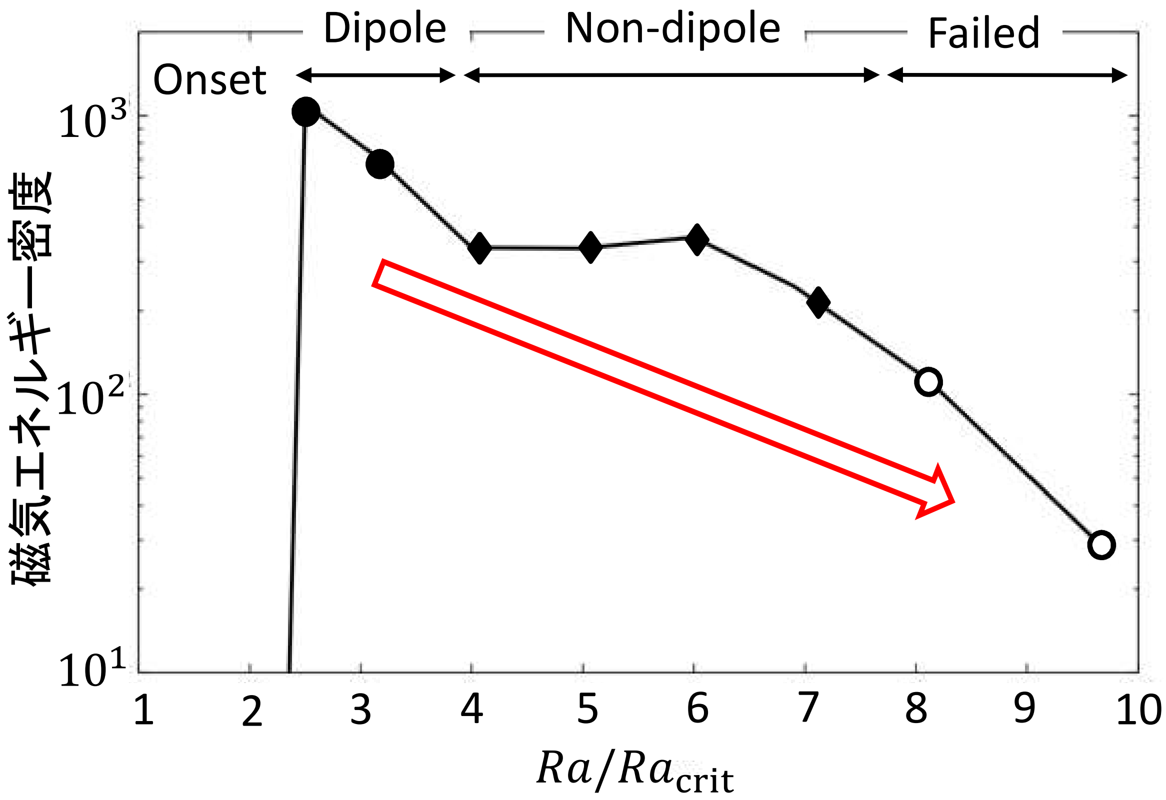
3.3 ダイナモレジーム



$r_{\mathrm{i}}/r_{\mathrm{o}}$: 小 → Dipoleが支配的な範囲: 狭くなる …(A)

・$r_{\mathrm{i}}/r_{\mathrm{o}} = 0.35$ではDipoleの範囲が広い, $r_{\mathrm{i}}/r_{\mathrm{o}} = 0.25$ではNon-dipoleの範囲が広い

3.4 磁気エネルギーとレイリー数の関係



$t = 1.5$から2までの
E_{mag}の時間平均

E_{mag} はonsetで最大
Ra/Ra_{crit}: 大 → E_{mag}: 小

3.5 磁気モーメント比較

磁気双極子モーメント M

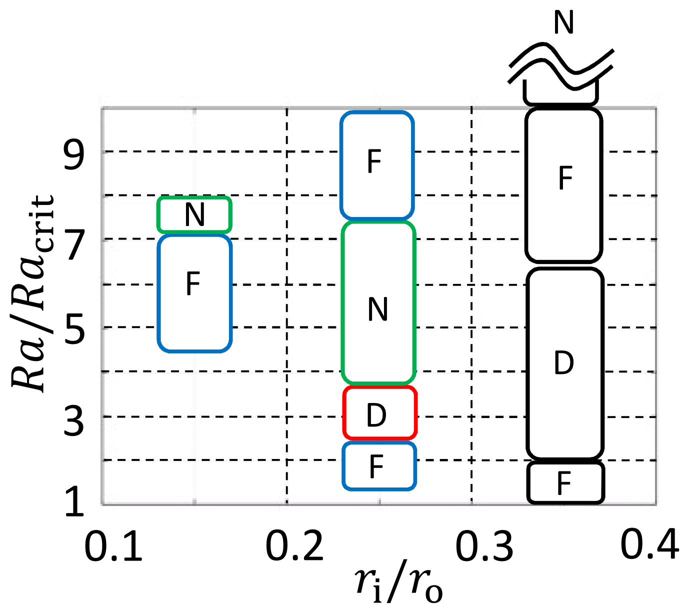
r_i/r_o	$Ra[\times 10^5]$	Ra/Ra_{crit}	Dynamo regime	$M[\times 10^{21}\mathrm{Am}^2]$
0.15	7.6	7.0	Non-dipole	1.90
0.25	1.8	2.5	Dipole	9.07
0.25	2.2	3.1	Dipole	4.96
0.25	2.6	$\boxed{3.6}$	Non-dipole	2.46 ⇦
0.25	3.6	5.0	Non-dipole	1.80
0.25	5.0	6.9	Non-dipole	1.71
0.35	1.1	2.0	Dipole	8.36
0.35	2.0	$\boxed{3.6}$	Dipole	6.84 ⇦
0.35	3.4	6.1	Dipole	4.33

$r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}$: 小→ M: 小
Dipoleが支配的になる対流: 起きにくくなる

4. 結論

過去の地球環境におけるダイナモ作用を理解するため、本研究では一連のシミュレーションを行い、半径比が$r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}=0.15, 0.25, 0.35$の場合に広い範囲のレイリー数で対流の特徴を明らかにし、またダイナモレジームを定量的に評価した。

- 半径比とレイリー数の関係
  $r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}$: 小 → Dipoleが支配的な領域: 狭くなる
- $r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}=0.25$におけるダイナモレジーム
  Ra/Ra_crit: 大 → E_mag: 小
- 半径比と双極子モーメントの関係
  $r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}$: 小→ Dipoleが支配的な対流: 起きにくくなる



F…Failed Dynamo
D…Sustained Dipole
N…Sustained Non-dipole

5. Future work

Question
今回見えたダイナモレジームの傾向は異なるエクマン数でも普遍的か?
Dipoleを維持するために追加のソースが必要か?

ダイナモを起きやすくするために
・エクマン数を小さくする: $E = 10^{-3} \rightarrow 10^{-4}, 10^{-5}$
　　+磁気プラントル数を小さく設定する
現実の推定値 $E = 10^{-15}$ に近い値で傾向が普遍的か検証

追加のソースとして
・組成対流
　寄与度を測る、double diffusivityを考慮する

別のジオメトリーとして
・完全球体(内核なし)
　初期地球における特徴を調べる

References

- Al-Shamali, F. M., Heimpel, M. H., and Aurnou, J. M. (2004) "Varying the spherical shell geometry in rotating thermal convection", Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 98(2): 153-169, doi:10.1080/0309192041000165928
- Biggin, A. J., Piispa, E. J., Holme, R., Paterson, G. A., Veikkolaonen, T., and Tauxe, L. (2015) "Paleomagnetic eld intensity variations suggest Mesoproterozoic inner-core nucleation", Nature, 526: 245-248, doi:10.1038/nature15523
- Busse, F. H. (1970) "Thermal instabilities in rapidly rotating systems", Journal of Fluid Mechnics, 44(3): 441-460
- Calkins, M. A., Julien, K., and Tobias, S. (2017) "Inertia-less convectively-driven dynamo models in the limit of low Rossby number and large Prandtl number", Physics of the Earth and Planetary Interiors, 266: 54-59, doi:10.1016/j.pepi.2017.03.003
- Chandrasekhar, S. (1961) Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford at the Clarendon Press
- Christensen, U. R., Aubert, J., Cardin P., Dormy, E., Gibbon, S., Glatzmaier, G. A., Grote, E. Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhnag, K. (2001) "A numerical dynamo benchmark", Physics of the Earth and Planetary Interiors,128: 25-34, doi:10.1016/S0031-9201(01)00275-8
- Christensen, U. R. and Aubert, J. (2006) "Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic eld", Geophysical Journal International, 166(1,1): 97-114, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x
- Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981) "Preliminary reference Earth model", Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25: 297-356
- Gubbins, D. and Roberts, P. H. "Magnetohydrodynamics of the Earth's Core", Jacobs, J. A., ed., Geomagnetism Volume 2 (Academic Press, 1987), p.1-183
- Heimpel, M. H., Aurnou, J. M., Al-Shamali, F. M., and Perez, N. G. (2005) , A numerical study of dynamo action as a function of spherical shell geometry", Earth and Planetary Science Letters, 236: 542-557, doi:10.1016/j.epsl.2005.04.032
- Heimpel, M. H. and Evans, M. E. (2013) "Testing the geomagnetic dipole and reversing dynamo models over Earth's cooling history", Physics of the Earth and Planetary Interiors, 224: 124-131, doi:10.1016/j.pepi.2013.07.007
- Kivelson, M., G., and Bagenal, F. "Planetary Magnetoshere", McFadden, L., Weissman, P. R., and Johnson, T. V. eds., Encyclopedia of the Solar System second edition (Academic Press, 2007), p.519-540
- Matsui, H., King, E., and Buffett, B. (2014) "Multiscale convection in a geodynamo simulation with uniform heat ux along the outer boundary", Geochemistry, Geophysics,
- Geosystems, 15: 3212-3225, doi:10.1002/2014GC005432
- Matsui, H., Calypso User Manual Version 1.1
- O'Rourke, J. G. and Stevenson, D. J. (2016) "Powering Earth's dynamo with magnesium precipitation from the core", Nature, 529: 387-389, doi:10.1038/nature16495
- Pozzo, M., Davies, C., Gubbins, D., and Alfe, D. "Transport properties for liquid silicon-oxygen-iron mixtures at Earth's core conditions", Physical Review B, 87(1), 014110, doi:10.1103/PhysRevB.87.014110
- Thebault, E., Finlay, C. C., Beggan, C. D., Alken, P., Aubert, J., Barrois, O., Bertrand, F., Bondar, T., Boness, A., Brocco, L., Canet, E., Chambodut, A., Chulliat, A., Coisson, P., Civet, F., Du, A., Fournier, A., Fratter, I., Gillet, N., Hamilton, B., Hamoudi, M., Hulot, G., Jager, T., Korte, M., Kuang, W., Lalanne, X., Langlais, B., Leger, J., Lesur, V., Lowes, F. J., Macmillan, S., Mandea, M., Manoj, C., Maus, S., Olsen, N, Petrov, V., Ridley, V., Rother, M., Sabaka, T. J., Saturnino, D., Schachtschneider, R., Sirol, O., Tangborn, A., Thomson, A., Toffner-Clausen, L., Vigneron, P., Wardinski, I., and Zvereva, T. (2015) "International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation", Earth, Planets and Space, 67:79, doi:10.1186/s40623-015-0228-9
- 河野長, David J. Stevenson (2003) ダイナモ作用と地球・惑星の磁場, 地震, 56(2): 311-325
- 高橋太(2005) 地球ダイナモシミュレーションの新たな発展, 地学雑誌, 114(2): 123-131
- 綱川秀夫, 地球の磁場, 山本明彦編著, 地球ダイナミクス (朝倉書店, 2016) p.89-111
- 松島政貴, 地球ダイナモ, 地球電磁気・地球惑星圏学会学校教育ワーキング・グループ編, 太陽地球系科学 (京都大学出版会, 2010) p.237-251

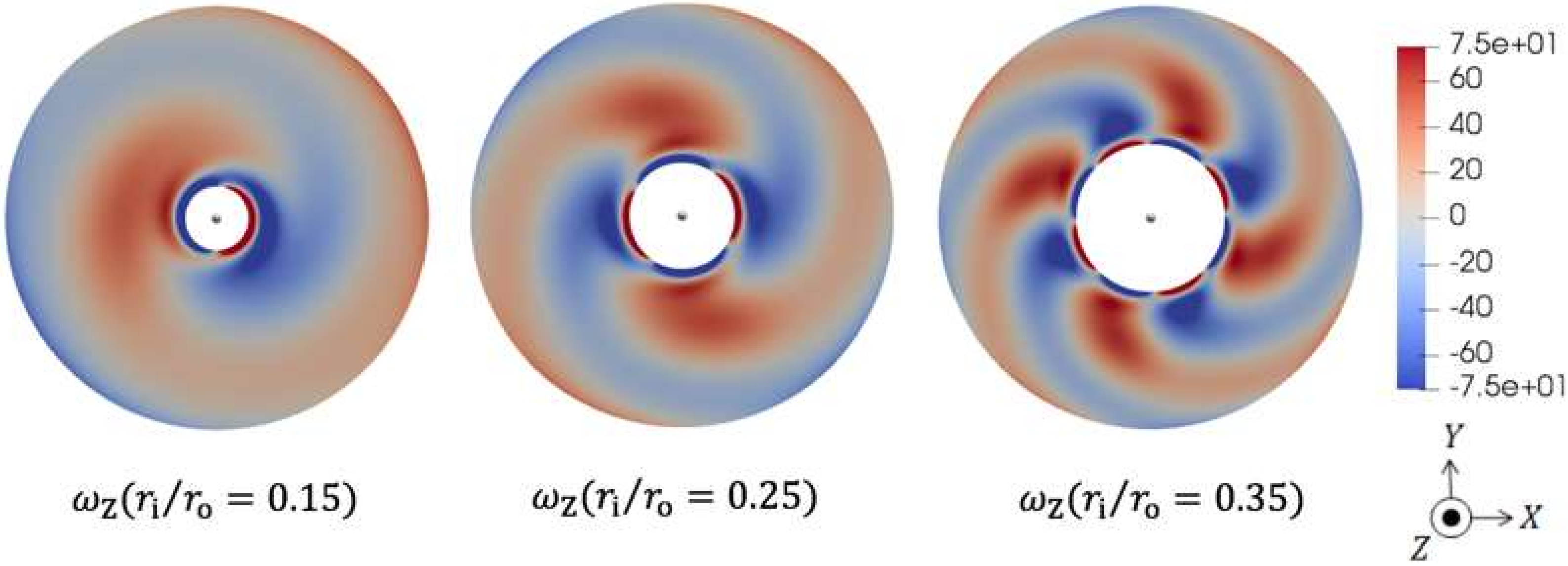
Appendix 1 Definition of physical quantities

Symbol	Definition
$\boldsymbol{u}$	velosity
$\boldsymbol{B}$	magnetic field
$\boldsymbol{J}$	current density
$\boldsymbol{g}$	acceleration of gravity
T	temperature
P	pressure
ρ	density
α_T	thermal expansion rate
$\boldsymbol{\Omega}$	rotation angular velosity
ν	kinematic viscosity coefficient
κ_T	temperature diffusion coefficient
η	magnetic field diffusion coefficient

$L(= r_\mathrm{o} - r_\mathrm{i})$	outer core thickness
μ_0	magnetic permeability of vacuum
ΔT	difference between T at ICB and T at CMB
$\boldsymbol{e}_z$	normal vector of rotation axis direction
$\boldsymbol{\omega}(= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})$	vorticity

予備スライド

1 Dominant wavenumber



$\omega_Z(r_i/r_o = 0.15)$ $\omega_Z(r_i/r_o = 0.25)$ $\omega_Z(r_i/r_o = 0.35)$

The azimuthal wavenumbers in the quasi steady state decrease when the core ratio becomes smaller. In other words, **a thicker shell (the smaller inner core) is likely to cause a larger structure.**

The critical wavenumber is fit to depend on r_i and L;

$$m_C = \frac{1}{0.89}\frac{2\pi r_i}{L} = \frac{1}{0.89}\frac{\chi}{1-\chi} \quad (\chi = r_i/r_o)$$

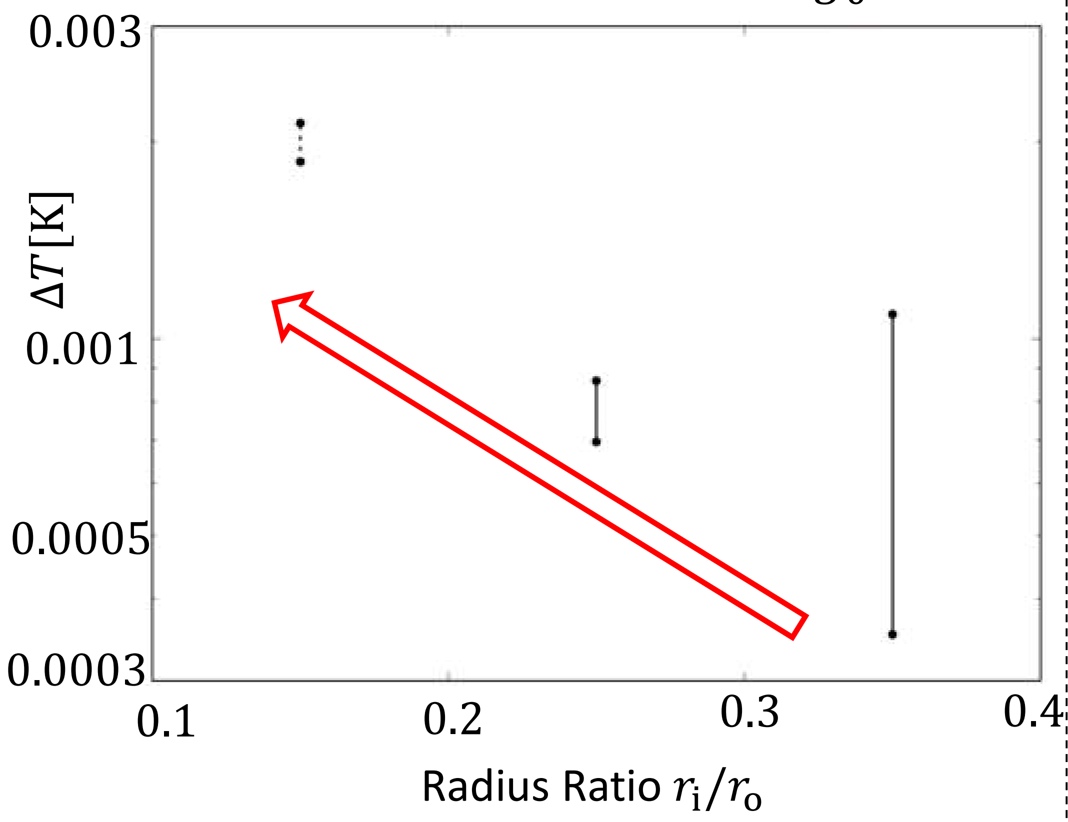
[Al-Shamali et al., 2004]

Using this formula, $m_C = 1.25, 2.35, 3.80$ in $r_i/r_o = 0.15, 0.25, 0.35$. The trend of our simulation data is consistent with their fitting.

2 Interpretation of simulation data

The average temperature difference between ICB and CMB; ΔT

$$\Delta T = \frac{\nu\Omega}{\alpha g_0 L}\frac{E}{Pr}Ra$$



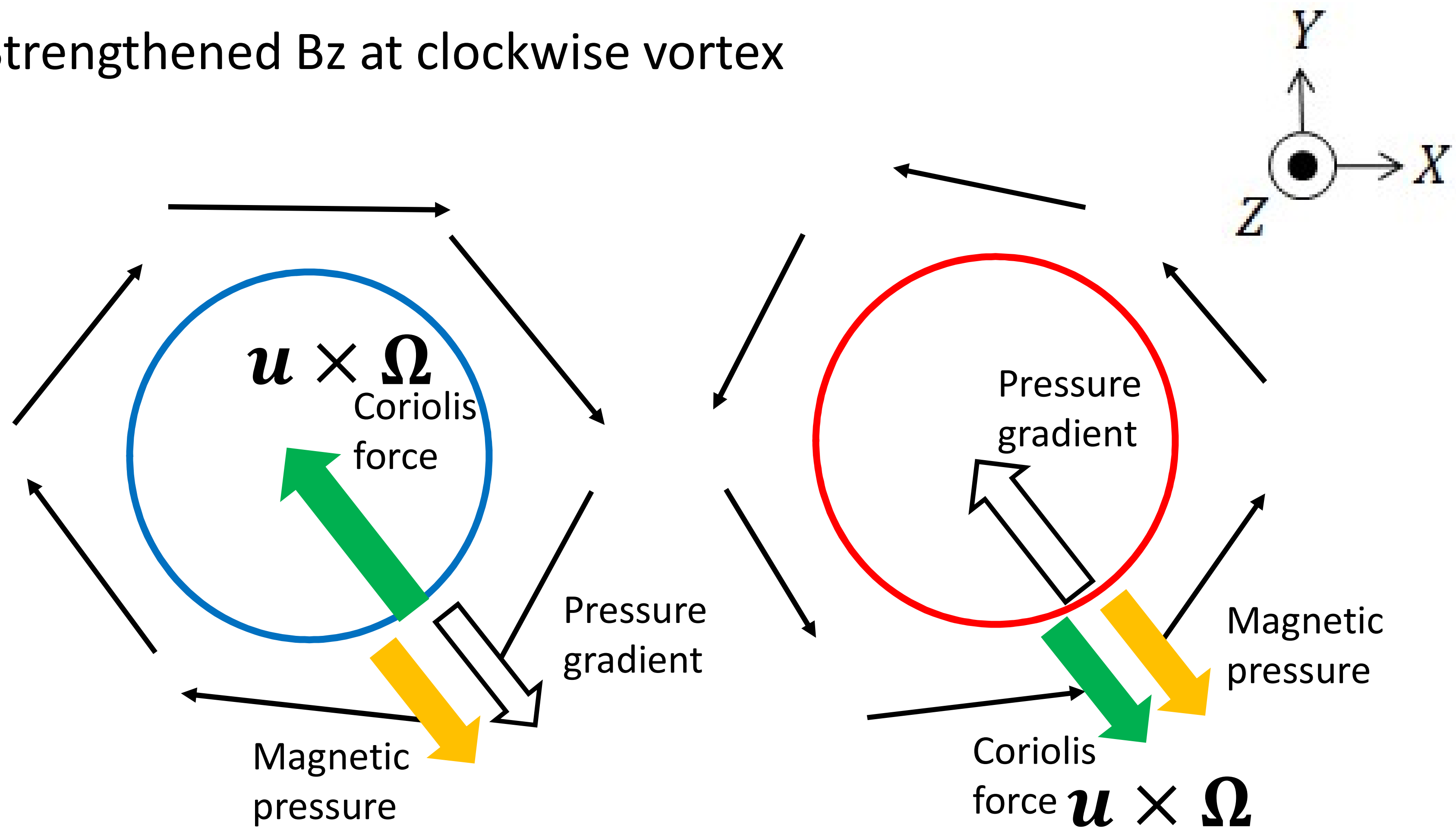
$E = 10^{-3}$, $Pr = 1$
$\eta = 1\ \mathrm{m/s^2}$ --> $\nu = \eta \cdot Pm = 5\ \mathrm{m/s^2}$
$\Omega = 7.27 \times 10^{-5}\ /\mathrm{s}$
$\alpha = 5 \times 10^{-6}\ /\mathrm{K}$, $g_0 = 10\ \mathrm{m/s^2}$
$L = (1 - r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o})\, r_\mathrm{o}$
$L = 0.75 \times 3485\ \mathrm{km} = 2614\ \mathrm{km}$,
$L = 0.65 \times 3485\ \mathrm{km} = 2265\ \mathrm{km}$
in $r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o} = 0.25, 0.35$

The range of Ra of sustained dipolar dominant dynamo was
$2.5 \times 10^5 \le Ra \le 3.1 \times 10^5$,
$1.1 \times 10^5 \le Ra \le 3.4 \times 10^5$
in $r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o} = 0.25, 0.35$
$\rightarrow \Delta T$

$r_\mathrm{i}/r_\mathrm{o}$: smaller $\rightarrow \Delta T$: bigger

The required buoyancy should be large for the smaller inner core.

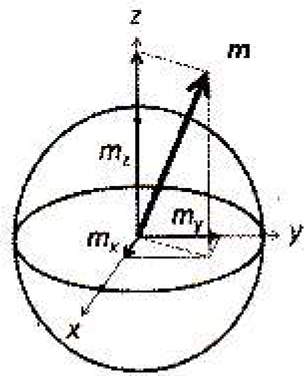
3 Strengthened Bz at clockwise vortex



Coriolis force: strong
→ Bz: strenghthened

Coriolis force: weak
→ Bz:diffuse

4 Magnetic dipole moment



$$l = 1$$

$$V = \frac{r_E}{\mu_0}\{g_1^0 P_1^0(\cos\theta) + g_1^1 \cos\phi P_1^1(\cos\theta) + h_1^1 \sin\phi P_1^1(\cos\theta)\}\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$$

$$= \frac{r_E^3}{\mu_0 r^2}\left(g_1^0\cos\theta + g_1^1\cos\phi\sin\theta + h_1^1\sin\phi\sin\theta\right)$$

$$\left(\because P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta, P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta\right)$$

Putting magnetic dipole in the center of Earth

$$V = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} = \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{4\pi r^3} = \frac{1}{4\pi r^2}\left(m_x\frac{x}{r} + m_y\frac{y}{r} + m_z\frac{z}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\left(m_x\sin\theta\cos\phi + m_y\sin\theta\sin\phi + m_z\cos\theta\right)$$

Comparing coefficients $m_x = \frac{4\pi r_E^3}{\mu_0} g_1^1, m_y = \frac{4\pi r_E^3}{\mu_0} h_1^1, m_z = \frac{4\pi r_E^3}{\mu_0} g_1^0$

Magnetic dipole moment $\boxed{m = \frac{4\pi r_E^3}{\mu_0}\sqrt{\left(g_1^0\right)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}}$

Inclination $\cos\theta_0 = \frac{m_z}{m} = \frac{g_1^0}{\sqrt{\left(g_1^0\right)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}}$

5 Differences between thermal and compositional convection

	Thermal	Compositional
Ra	$\alpha_T g_0 (\Delta T) L / \nu \kappa_T$	$\alpha_C g_0 (\Delta C) L / \nu \kappa_C$
E	$\nu / \Omega L^2$	$\nu / \Omega L^2$
Pr	ν / κ_T	ν / κ_C
Pm	ν / η	ν / η

- Prandtl number
$Pr_C / Pr_T = O(10^3)$ [Calkins et al., 2017]
($\Leftrightarrow \kappa_T / \kappa_C = O(10^3)$)

- Rayleigh number
$\alpha_T \approx 10^{-5}\mathrm{K}^{-1}$, $\Delta T \approx 1000K$
$\alpha_C \approx 0.1$? ($\mathrm{Fe}_{0.82}\mathrm{Si}_{0.10}\mathrm{O}_{0.08}$ [Pozzo et al., 2013]), $\Delta C = ?$
If $\alpha_T \Delta T \sim \alpha_C \Delta C$, $Ra_C / Ra_T = O(10^3)$